Поверхность $V_n \subset P_N$ определяется системой уравнений

$$\Omega^\alpha_0 = 0. \qquad (2.3)$$

Дифференцируя уравнения (2.3) и используя лемму Картана, получим

$$\Omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{ij}\Omega^j_0, \quad \Lambda^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ji}, \qquad (2.4)$$

где

$$d\Lambda^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ik}\Omega^k_j + \Lambda^\alpha_{kj}\Omega^k_i - \Lambda^\alpha_{ij}\Omega^0_0 - \Lambda^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_{ijk}\Omega^k_0. \qquad (2.5)$$

Квадратичные формы $\varphi^\alpha = \Lambda^\alpha_{ij}\Omega^i_0\Omega^j_0$ являются асимптотическими квадратичными формами поверхности $V_n \subset P_N$. Используем понятие нуль-индекса $\mu(x)$ точки x поверхности V_n [2]. Он равен размерности подпространства $L_x \subset T_x$, определяемого системой

$$\Lambda^\alpha_{ij}\, y^j = 0. \qquad (2.6)$$

Считаем, что $\mu(x) = k = n-1$. Тогда $M_i \in L_x$ ($i,j,k = \overline{1, n-1}$) и симметричные матрицы Λ^α_{ij} примут вид

$$\Lambda^\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^\alpha_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2.7)$$

Тогда асимптотические квадратичные формы поверхности V_n запишутся так:

$$\varphi^\alpha = \Lambda^\alpha_{nn}(\Omega^n_0)^2. \qquad (2.8)$$

Так как система уравнений $\Omega^n_0 = 0$ вполне интегрируема на V_n, то она определяет на V_n расслоение с одномерной базой и ($n-1$)-мерными слоями. Многообразия

$$\Lambda^i_{jk}X^jX^k - 2\Lambda^i_j X^j X^0 = 0,$$
$$\Lambda^n_{ijk}X^jX^k - 2\Lambda^n_{ij}X^j = 0 \qquad (2.9)$$

являются T-индикатрисой и H_0-индикатрисой [3] отображений Ψ_1 и Ψ_2. Соответствующий геометрический аналог корреляции, имеющей касание второго порядка с отображением Ψ_2, можно получить из [4].

Библиографический список

1. О в ч и н н и к о в В.М. Некоторые вопросы геометрии соответствий между точечным пространством и пространством гиперплоских элементов//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.69-72.

2. А к и в и с М.А. О многомерных сильно параболических поверхностях//Изв.вузов. Матем. 1987. №5. С.3-10.

3. А н д р е е в Б.А. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_H(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1978. Вып.9. С.11-19.

4. А к и в и с М.А. О простейшем условии алгебраизуемости n-мерного многообразия нуль-пар//Проблемы теории тканей и квазигрупп/Калининский ун-т. Калинин. 1985. С.3-7.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.762

ЛИФТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н.Д. П о л я к о в
(Чувашский пединститут)

1. Пусть задано дифференцируемое многообразие M класса C^∞ ($\dim M = n$). Рассмотрим n-мерную окрестность U, в которой текущая точка x определяется системой координат x^i ($i,j,\ldots = \overline{1,n}$). Г.Ф.Лаптевым показано [1], что на M возникает бесконечная последовательность линейных дифференциальных форм $\omega^i, \omega^i_k, \omega^i_{k_1k_2}, \ldots$, симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру по базовым формам ω^i:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \qquad (1)$$

формы $\bar\omega^i_j = \omega^i_j|_{\omega^k=0}$ являются инвариантными формами группы $\mathcal{D}^1_n$, а формы $\bar\omega^i_j, \bar\omega^i_{jk} = \omega^i_{jk}|_{\omega^k=0}$ -группы $\mathcal{D}^2_n$.

На дифференцируемом многообразии M зададим распределение m-мерных касательных элементов λ [2] с помощью следующих дифференциальных уравнений:

$$d\lambda^i_a - \lambda^i_b\theta^b_a + \lambda^j_a\omega^i_j = \lambda^i_{ak}\omega^k, \qquad (2)$$

где θ^a_b -параметрические формы, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$d\theta^a_b = \theta^c_b \wedge \theta^a_c + \omega^i \wedge \theta^a_{bi}. \qquad (3)$$

Формы θ^a_b при $\omega^i = 0$ становятся инвариантными формами полной линейной группы $GL(m,R)$, представленной как группа преобразований системы векторов $\lambda_a = \lambda^i_a e_i$. Векторы λ_a натягивают в каждой точке $x \in M$ элемент распределения λ.

Продолжив уравнения (2), получим

$$d\lambda^i_{ak} - \lambda^i_{bk}\theta^b_a - \lambda^i_{aj}\omega^j_k + \lambda^j_{ak}\omega^i_j - \lambda^i_b\theta^b_{ak} + \lambda^j_a\omega^i_{jk} = \lambda^i_{akm}\omega^m. \qquad (4)$$

Объект $\{\lambda^i_a, \lambda^i_{ak}\}$ является фундаментальным объектом первого порядка распределения λ.

Известно (см.[2]), что распределение касательных элементов λ на M интегрируемо, если выполнены условия:

$$r^i_{ab} = \lambda^i_{aj}\lambda^j_b - \lambda^i_{bj}\lambda^j_a = 0, \quad \lambda^i_b\,\theta^c_{ai} + \lambda^i_a\,\theta^c_{bi} = 0, \tag{5}$$

где r^i_{ab} -объект неголономности.

2.Введем в рассмотрение касательное расслоение $T(M)$ многообразия M. Образующий элемент слоя $T_x(M)$ многообразия M обозначим в точке $x \in M$ через $y = y^i e_i$. Координаты точки $y \in T(M)$ обозначим $y^J = \{y^i = x^i, y^{n+i}\}$ $(J, \mathcal{J}, \ldots = \overline{1,2n})$. Структурными формами касательного расслоения являются формы

$$\Omega^i = \omega^i, \; \Omega^{n+i} = dy^i + y^j\omega^i_j, \tag{6}$$

удовлетворяющие следующим структурным уравнениям:

$$\begin{cases} d\Omega^i = \Omega^j \wedge \Omega^i_j, \\ d\Omega^{n+i} = \Omega^j \wedge \Omega^{n+i}_j + \Omega^{n+j} \wedge \Omega^{n+i}_{n+j}, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\Omega^J_{\mathcal{J}} = \{\Omega^i_j = \omega^i_j, \Omega^{n+i}_j = \omega^i_{jk}y^k, \Omega^i_{n+j} = 0, \Omega^{n+i}_{n+j} = \omega^i_j\}. \tag{8}$$

В каждой точке $x \in M$ формы $\overline{\Omega}^J_{\mathcal{J}} = \Omega^J_{\mathcal{J}}\big|_{\omega^i = 0}$ являются инвариантными формами группы G, являющейся подгруппой полной линейной группы $GL(2n, R)$. В каждой касательной плоскости $T_y(T(M))$ группа G представлена как группа преобразований векторного репера $E_J = \{E_i, E_{n+i}\}$:

$$\delta E_i = \overline{\Omega}^j_i E_j + \overline{\Omega}^{n+j}_i E_{n+j}, \quad \delta E_{n+i} = \overline{\Omega}^{n+j}_{n+i} E_{n+j}. \tag{9}$$

Поле G -инвариантных n-мерных векторных подпространств V_y, натянутых на векторы E_{n+i}, называется вертикальным распределением [3].

Определено отображение $p: T(M) \to M$, ставящее каждому касательному вектору y в соответствие точку, в которой он задан: $p(y) = x$. Дифференциальные уравнения поля вектора $A = A^J E_J$ имеют вид

$$dA^J + A^{\mathcal{J}}\Omega^J_{\mathcal{J}} = A^J_{\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}, \quad \text{где } \Omega^i_{n+j} = 0. \tag{10}$$

Утверждение I. Каждый ненулевой вектор $a = a^i e_i$ в $T_x(M)$ определяет вектор A в $T_y(T(M))$, где $p(y) = x$.

Пусть на M задано векторное поле $a = a^i e_i$. Тогда

$$da^i + a^j\omega^i_j = a^i_k\omega^k, \tag{11}$$

$$da^i_k - a^i_j\omega^j_k + a^j_k\omega^i_j + a^j\omega^i_{jk} = a^i_{km}\omega^m. \tag{12}$$

Введем величины

$$'a^J = \{'a^i = a^i, \; 'a^{n+i} = a^i_k y^k\}, \tag{13}$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид (10). В естественных координатах вектор $'a = {'a^J} E_J$ в $T_y(T(M))$ совпадает с полным лифтом вектора a [3]. Обозначим этот вектор через ${}^c a$.

3.На касательном расслоении $T(M)$ распределение $2m$-мерных касательных элементов L задается системой дифференциальных уравнений:

$$dL^J_A - L^J_B\,\theta^B_A + L^{\mathcal{J}}_A\,\Omega^J_{\mathcal{J}} = L^J_{A\mathcal{J}}\,\Omega^{\mathcal{J}}, \tag{14}$$

где θ^B_A $(A, B, \ldots = 1, \ldots, m, n+1, \ldots, n+m)$-параметрические формы. При $\Omega^J = 0$ формы θ^B_A являются инвариантными формами группы $GL(2m, R)$.

Потребуем теперь, чтобы в каждой точке $y \in T(M)$ плоскости L_y и V_y имели общее m-мерное G-инвариантное подпространство $L'_y = L_y \cap V_y$, натянутое на m линейно независимых векторов L_{n+a}. При таком требовании распределение L должно содержать G-инвариантное подрасслоение L' $(\dim L' = m)$, которое одновременно является подрасслоением V.

Утверждение 2. Распределение $2m$-мерных касательных элементов L в $T(M)$ содержит m-мерное G-инвариантное подрасслоение L' расслоения V тогда и только тогда, когда выполнены равенства:

$$L^i_{n+a} = 0, \quad \theta^b_{n+a} = 0. \tag{15}$$

При выполнении условий (15) система дифференциальных уравнений (14) имеет вид:

$$\begin{cases} dL^i_a - L^i_b\,\theta^b_a + L^j_a\,\Omega^i_j = L^i_{a\mathcal{J}}\,\Omega^{\mathcal{J}}, \\ dL^{n+i}_a - L^{n+i}_b\,\theta^b_a + L^{n+j}_a\,\Omega^{n+i}_{n+j} - L^{n+i}_{n+b}\,\theta^{n+b}_a + L^j_a\,\Omega^{n+i}_j = L^{n+i}_{a\mathcal{J}}\,\Omega^{\mathcal{J}}, \\ dL^{n+i}_{n+a} - L^{n+i}_{n+b}\,\theta^{n+b}_{n+a} + L^{n+j}_{n+a}\,\Omega^{n+i}_{n+j} = L^{n+i}_{n+a\,\mathcal{J}}\,\Omega^{\mathcal{J}}. \end{cases} \tag{16}$$

Утверждение 3. Если распределение $2m$-мерных касательных элементов L в $T(M)$ содержит m-мерное G-инвариантное подрасслоение L' расслоения V, то система дифференциальных уравнений структурного объекта распределения имеет вид (16).

Из уравнений (16) следует, что структурный объект распределения L содержит два линейных однородных подобъекта $\{L^i_a\}$ и $\{L^{n+i}_{n+a}\}$. Если выполнены условия (15), то в группе $GL(2m, R)$ выделяется подгруппа G' с инвариантными формами $\{\overline{\theta}^b_a, \overline{\theta}^{n+b}_a, \overline{\theta}^{n+b}_{n+a}\}$.

Утверждение 4. Если распределение $2m$-мерных касательных элементов L в $T(M)$ содержит m-мерное G-инвариантное подрасслоение L' расслоения V, то группа $GL(2m,R)$, представленная как группа преобразований векторного репера в слоях распределения L, содержит подгруппу G'.

4. Покажем теперь, что, если на $\mathcal{M}$ задано распределение m-мерных касательных элементов λ, то на $T(\mathcal{M})$ естественным образом определяется распределение $2m$-мерных касательных элементов, содержащее m-мерное G-инвариантное подрасслоение расслоения V. Для этого рассмотрим следующие величины:

$$\Lambda_A^{\mathcal{J}} = \{ \Lambda_a^i = \lambda_a^i ,\ \Lambda_a^{n+i} = \lambda_{ak}^i y^k ,\ \Lambda_{n+a}^i = 0 ,\ \Lambda_{n+a}^{n+i} = \lambda_a^i \}. \qquad (17)$$

Используя (1), (2), (6), убеждаемся, что дифференциальные уравнения функций (17) имеют вид (16). При этом параметрические формы группы $GL(2m,R)$ определяются равенствами

$$\theta_A^B = \{ \theta_a^b = \theta_a^b ,\ \theta_a^{n+b} = \theta_{ai}^b y^i ,\ \theta_{n+a}^b = 0 ,\ \theta_{n+a}^{n+b} = \theta_a^b \}. \qquad (18)$$

Теорема 1. Если на $\mathcal{M}$ задано распределение m-мерных касательных элементов λ, то на $T(\mathcal{M})$ естественным образом возникает распределение $2m$-мерных касательных элементов Λ, содержащее m-мерное G-инвариантное подрасслоение расслоения V.

Если вектор a принадлежит в точке $x \in M$ элементу распределения λ_x, то $a^i = u^a \lambda_a^i$ и ${}^c a = u^a \Lambda_a + u_j^a y^j \Lambda_{n+a}$.

Утверждение 5. Если в каждой точке $x \in M$ вектор a принадлежит элементу распределения λ_x, то полный лифт ${}^c a$ вектора a в $T(M)$ в точке $y\,(p(y)=x)$ принадлежит элементу распределения Λ.

Определение. Распределение касательных элементов Λ в $T(M)$, определенное структурным объектом $\Lambda_A^{\mathcal{J}}$ (см. (13)), назовем полным лифтом распределения касательных элементов λ в $T(M)$.

Теорема 2. Если распределение λ на $\mathcal{M}$ интегрируемо, то распределение Λ на $T(\mathcal{M})$, являющееся полным лифтом распределения λ, также интегрируемо.

Библиографический список

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139-190.

2. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 29-48.

3. Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles // Differential geometry. New-York, 1973. 434 p.

УДК 514.75

НОРМАЛИ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И. Попов

(Калининградский университет)

1. Инвариантную теорию регулярного гиперполосного распределения проективного пространства P_n построил А.В. Столяров [4]. В данной работе геометрия регулярного гиперполосного распределения, которое назовем $\mathcal{H}(M)$-распределением (или распределением $\mathcal{H}(M)$), рассматривается в аффинном пространстве A_n. Найдены аффинные нормали $\mathcal{H}(M)$-распределения, которые являются обобщениями аффинных нормалей Бляшке, нормалей $\vec{L}$ и $\vec{Q}$ гиперплоскостного распределения [1]. В окрестностях второго и третьего порядков получены проективные пучки нормалей 1-го рода для $\mathcal{H}(M)$-распределения аффинного пространства. Указаны различные конструкции построения нормалей регулярного $\mathcal{H}(M)$-распределения.

Работа выполнена методом Г.Ф. Лаптева [2]. На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L} = \overline{1,n};\quad i,j,k,\ell = \overline{1,m};\quad \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma} = \overline{m+1,n};\quad \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1};$$
$$a,b,c = \overline{1,n-1}.$$

2. К $\mathcal{H}(M)$-распределению присоединим подвижной репер $\{A,\vec{e}_{\mathcal{J}}\}$ аффинного пространства следующим образом: точку A совместим с центром данного распределения; векторы $\{\vec{e}_i\}$ поместим в плоскость $M(A)$ – m-мерную текущую плоскость базисного распределения (M-распределение); векторы $\{\vec{e}_\alpha\}$ поместим в плоскость $\chi_{n-m-1}(A)$-текущую плоскость распределения характеристик (χ-распределение). Согласно [4-5], относительно выбранного репера R_1 первого порядка, система дифференциальных уравнений $\mathcal{H}(M)$-распределения имеет вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}\omega^K;\quad \omega_i^\alpha = M_{iK}^\alpha \omega^K;\quad \omega_\alpha^n = H_{\alpha\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}};\quad \omega_\alpha^i = N_{\alpha K}^i \omega^K. \qquad (1)$$

Продолжение уравнений (1) приводит к дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов первого